Musterlösung 3

1. Als Grundraum wählen wir

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_N) : x_i \in \{1, \dots, 365\}\} = \{1, \dots, 365\}^N,$$

wobei x_i den Tag beschreibt, an dem die i-te Person geboren wurde, $1 \le i \le N$. Es gilt, dass $|\Omega| = 365^N$.

a) Wir definieren $A_N =$ „alle N Personen haben einen unterschiedlichen Geburtstag“. Natürlich gilt $P(A_N) = 0$ für $N > 365$. Für $1 \le N \le 365$ haben wir

$$P(A_N) = \frac{|A_N|}{|\Omega|} = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - N + 1)}{365^N} = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{365 - i}{365}.$$

b) Wir definieren $B_N =$ „mindestens 2 Personen haben am selben Tag Geburtstag.“. Es gilt $B_N = A_N^c$ und deshalb $P(B_N) = 1 - P(A_N)$. Mit der Formel aus a) erhalten wir deshalb folgende Tabelle:

N	4	16	22	23	50	80
$P(B_N)$	0.016	0.284	0.476	0.507	0.970	0.9999

Wir sehen, dass N mindestens 23 sein muss.

c) Die obige Tabelle zeigt, dass $P(B_{50}) = 0.970$.

2. **a)** “Mit Zurücklegen”:

$$\begin{aligned} P[A] &= 1 - P[A^c] = 1 - \frac{25^5}{26^5} = \frac{2115751}{11881376} = 0.178073 \\ P[B] &= \frac{5^5}{26^5} = \frac{3125}{11881376} = 0.000263017 \\ P[C] &= \frac{1^5}{26^5} = \frac{1}{11881376} = 8.41653 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

b) "Ohne Zurücklegen":

$$
\begin{aligned}
P[A] &= \frac{\binom{25}{4}}{\binom{26}{5}} = \frac{5}{26} \quad \text{oder anders gerechnet} \\
P[A] &= 1 - P[A^c] = 1 - \frac{\binom{25}{5}}{\binom{26}{5}} = 1 - \frac{25!}{5!\,20!} \cdot \frac{21!\,5!}{26!} = 1 - \frac{21}{26} = \frac{5}{26} \quad \text{oder} \\
P[A] &= 1 - P[A^c] = 1 - \frac{25}{26} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{23}{24} \cdot \frac{22}{23} \cdot \frac{21}{22} = \frac{5}{26} = 0.192308 \\
P[B] &= \frac{\binom{5}{5}}{\binom{26}{5}} = \frac{5!\,21!}{26!} = \frac{120}{7893600} = 0.0000152022 \quad \text{oder anders gerechnet} \\
P[B] &= \frac{5}{26} \cdot \frac{4}{25} \cdot \frac{3}{24} \cdot \frac{2}{23} \cdot \frac{1}{22} = 0.0000152022 \\
P[C] &= \frac{1}{26} \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{23} \cdot \frac{1}{22} = \frac{1}{7893600} = 1.26685 \cdot 10^{-7}
\end{aligned}
$$

3. a) Es handelt sich um ein Laplace Modell auf dem Raum der Permutationen von n Elementen. Betrachte das Ereignis

$A_i = \{i \text{ ist ein Fixpunkt der Permutation}\} = \{\text{der } i\text{-te Mann bekommt seinen Hut zurück}\}.$

Das Ereignis, dass niemand seinen Hut zurückbekommt, ist $A^{(n)} := (A_1 \cup \ldots \cup A_n)^c$. Also finden wir mit dem Prinzip von Inklusion und Exklusion (Serie 2, Aufgabe 4), dass

$$P_n := P[A^{(n)}] = 1 - P[A_1 \cup \ldots \cup A_n] = 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} P[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}].$$

Jetzt:

$$P[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}] = \frac{\text{Anzahl Permutationen, die } i_1, \ldots, i_k \text{ unverändert lassen}}{n!} = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

Man hat $\binom{n}{k}$ verschiedene Möglichkeiten, die Menge $\{i_1, \ldots, i_k\}$ aus $\{1, \ldots, n\}$ auszuwählen. Also ist

$$P[A^{(n)}] = 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

b) Wähle zuerst eine Gruppe von k Männern aus den n Männern aus. Dazu haben wir $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese k Männer ihren Hut zurückbekommen, ist $\frac{(n-k)!}{n!}$. Um die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, dass *genau* diese k Männer ihren Hut zurückbekommen, muessen wir mit der Wahrscheinlichkeit multiplizieren, dass von den restlichen $n-k$ Männer niemand seinen Hut zurückbekommt, also mit P_{n-k}, siehe oben. Insgesamt erhalten wir also, dass die Wahrscheinlichkeit, dass *genau* k Männer ihren Hut zurückbekommen,

$$Q_n^k := \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} P_{n-k} = \frac{1}{k!}\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!}\right).$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Da $e^{-1} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!}$, finden wir $\lim_{n\to\infty} P_n = e^{-1}$, und für die zweite Wahrscheinlichkeit
$\lim_{n\to\infty} Q_n^k = \frac{e^{-1}}{k!}$.